Colección "Matemática Educativa y Tecnología"

APLICACIONES SOBRE LA MODELACIÓN, LA VISUALIZACIÓN Y USO DE REPRESENTACIONES EN LA ERA NUMÉRICA

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F. (Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro "El Infinito en un Junco" inicia su obra diciendo:

"Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente"

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona "La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción".

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encentres en este libro beneficios.

El *libro "Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"* es la parte práctica del libro anterior llamado *"Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"*, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro *"Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica"*. Pérez menciona lo siguiente:

"El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión "En la Era Numérica"), que se entrecruza con los tres primeros."

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA[1] y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Graficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t, manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

---

[1] ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que liguen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre "Nociones de aproximación y Tendencia". Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada "El jardín de calabazas" y Hitt y Quiroz proponen la actividad "Rectángulos y círculos". En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM[2] no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

[2] Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1: Señalización para Protección Civil

Secuencia didáctica

Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C. [1]

Problemática y propósitos de aprendizaje

En el contexto de la señalización en materia de Protección Civil (SEGOB, 2011), tema que se considera de relevancia social, se plantean situaciones problemáticas que darán lugar a modelos cuadráticos, y que brindarán a los alumnos oportunidades para la comprensión y análisis de las mismas, a la vez que podrán conocer conceptos, procedimientos, construir argumentaciones, manejar diferentes lenguajes, y discutir proposiciones, relacionados con el estudio de la ecuación cuadrática.

Así, se abordarán situaciones modelables con ecuaciones cuadráticas de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0;\ a,\ b,\ c\ \in\ R;\ a \neq 0,$$

articulando a lo largo de la secuencia, representaciones gráficas, tabulares, algebraicas y en lenguaje natural.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Función, ecuación, incógnita, solución de una ecuación, áreas, perímetros, representaciones gráficas, numéricas y algebraicas.

Específicos: Ecuación cuadrática, función cuadrática, gráficas de funciones.

Nivel de estudios

Primer semestre de bachillerato (15 a 16 años).

Total de actividades y duración aproximada

Actividades de apertura, desarrollo y cierre, estructuradas en seis, cuatro y cuatro bloques, respectivamente, para realizarse en un total de cinco a seis sesiones de cincuenta minutos cada una.

Materiales necesarios

- Hojas de trabajo para cada estudiante.
- Applets o Archivos de GeoGebra en línea.
- Una computadora con GeoGebra para cada equipo de estudiantes. Los applets se diseñaron en GeoGebra clásico, versión 6.
- Proyector (para utilizar en discusiones grupales).
- Hojas de papel, cartoncillo o cartulina, de diferentes colores, para construir señales de protección civil en diferentes tamaños.
- Lápices o plumones de color, regla graduada y compás.

---

[1] Universidad de Sonora, México.

- Cinta métrica

Método o recomendaciones de enseñanza

La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017).

Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

El contexto utilizado en las actividades didácticas está directamente vinculado a nuestro entorno social. Se pretende despertar el interés de los estudiantes al presentar situaciones en un contexto de la vida cotidiana donde las matemáticas aparecen como una herramienta útil para la modelación y resolución de problemas, contando además con el apoyo de una herramienta tecnológica-didáctica que privilegia la actividad del estudiante, y que se constituirá en un medio para explorar, analizar, formular conjeturas y ponerlas a prueba.

En cuanto a los conocimientos previos de los estudiantes, será necesario que estos conozcan los números, sus operaciones y propiedades; tener nociones sobre el uso de la literal para representar cantidades desconocidas y manejo básico del plano cartesiano. No se requiere haber utilizado GeoGebra con anterioridad, pues los archivos o applets a utilizar sólo requieren manipulaciones o construcciones muy básicas.

Actividades de Apertura: El propósito de este bloque de actividades es plantear situaciones sencillas encaminadas al conocimiento del contexto, señales y avisos de protección civil, en donde la actividad matemática se limita a poner en juego conocimientos previos como el manejo de números, operaciones y cálculo de áreas, para el establecimiento de relaciones entre las dimensiones de las formas utilizadas para las señales de protección civil y la distancia máxima de observación de la señal. En un primer momento, se les solicita a los estudiantes identificar algunas de las señales plasmadas en las hojas de trabajo para, posteriormente, localizar algunas de ellas en su entorno escolar, laboral o social.

Actividades de Desarrollo: El propósito de la primera actividad de desarrollo es modelar situaciones problema con ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 = c$ $(a \neq 0)$, analizar el proceso de su resolución, así como número y tipo de soluciones, para finalmente dar respuesta al problema planteado. La actividad consiste en determinar la distancia máxima de observación para algunas señales de venta en el mercado, con dimensiones preestablecidas por los fabricantes y decidir si son adecuadas para las necesidades de algunos sitios. Se acuerda trabajar con dimensiones mínimas, por lo que el signo $\geq$ en la expresión algebraica presentada por la Norma, podrá sustituirse por uno de igualdad. Aunque la situación puede ser abordada de forma numérica, resulta mucho más conveniente el uso del lenguaje algebraico. En cuanto a los métodos de resolución, se espera que se movilice el uso de operaciones inversas. Se plantea también la comparación de las soluciones de la ecuación y la solución del problema, con las restricciones que impone el contexto.

Las actividades de desarrollo continúan con el planteamiento de situaciones que pueden modelarse mediante ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$ y $b \neq 0$), en donde se requiere analizar los procedimientos de resolución, sus soluciones y la solución del problema original. En esta secuencia la actividad consiste en determinar las dimensiones de dos señales, una triangular y otra rectangular, con la misma base y la misma área, dado que se establece la altura de la señal rectangular. Aunque sí existen tales figuras, las dimensiones del rectángulo no cumplen en ningún caso con la norma que establece que "la proporción del rectángulo podrá ser desde un cuadrado y hasta que la base no exceda el doble de la altura". Entre los procedimientos para lograr establecer el modelo algebraico se considera la igualación de las expresiones que corresponden a las áreas de ambas figuras, lográndose, así, una ecuación con incógnita en ambos miembros de la ecuación y sin términos independientes. Debe tenerse cuidado de no utilizar propiedades de cancelación para el producto pues, al aplicarla incorrectamente, se descartaría la solución $x = 0$.

En la misma dirección, al proponer la construcción de dos señales, una cuadrada y una triangular, en las que se preserve la suma de sus bases y que corresponda a una medida fija dada, se logrará modelar la situación con una ecuación cuadrática completa, es decir, de la forma ($ax^2 + bx + c = 0$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; $a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0$). Entre los procedimientos para lograr establecer el modelo algebraico se considera la igualación de las expresiones que corresponden a las áreas de ambas figuras de las señales, lográndose así, una ecuación con términos cuadráticos en ambos miembros de la ecuación.

El uso de GeoGebra, en las actividades de desarrollo, se centra principalmente en la construcción y exploración de modelos algebraicos, geométricos, gráficos y tabulares, para la formulación, contrastación, verificación o refutación de conjeturas.

Actividades de Cierre: En las actividades de cierre se discuten las distintas formas que pueden tomar las ecuaciones cuadráticas, dependiendo de los valores de los coeficientes de la misma, partiendo de las formas más simples y avanzando hacia las más complejas. Se analizan el número y tipo de soluciones encontradas para cada una de ellas, así como los diversos procedimientos empleados en la resolución de las mismas: operaciones inversas, factorización, completar cuadrados, completar el trinomio cuadrado perfecto, entre otros. Se parte de casos particulares hasta llegar al caso general y, por ende, al establecimiento de la fórmula general y la discusión de las posibles soluciones.

El uso del software se centra en el manejo de familias de ecuaciones, representaciones geométricas, gráficas, algebraicas, numéricas y tabulares.

Referencias

Díaz-Barriga, A. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. Recuperado el 20 de marzo de 2021, de http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Secretaría de Gobernación. (2011). Norma Oficial Mexicana NOM-003-SEGOB-2011. Señales y avisos para protección civil. - Colores, formas y símbolos a utilizar. Publicada el 23 de diciembre de 2011 en el Diario Oficial de la Federación. Última reforma publicada el 15 de julio de 2015.

Subsecretaría de Educación Media Superior. (2017). Dirección General del Bachillerato. Dirección de Coordinación Académica. Matemáticas I. Disponible en: https://www.dgb.sep.gob.mx/informacion-academica/programas-de-estudio.php

Actividades de Apertura

Nombre:____Grupo:__________Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Responde a las preguntas planteadas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Bloque 1

1. Enseguida se presentan algunas señales utilizadas en materia de protección civil:





a. ¿Cuáles de ellas conoces? ¿Dónde las has visto?

b. Investiga lo que significan el símbolo, la forma y el color.

Bloque 2

1. Comenten la importancia de este tipo de señales para mejorar la seguridad en algunos sitios e instalaciones.

Bloque 3

Nota: Se sugiere realizar este Bloque como tarea extra clase.

1. Localiza una señal de Protección Civil en tu entorno. ¿Puedes distinguirla claramente al colocarte 3 metros frente a ella? ¿Y a los 5 metros? ¿De qué depende que pueda ser claramente visible?

   a. Ahora, aléjate lo más posible, de modo que la señal aún continúe siendo claramente visible para ti. Estima esta última distancia, la cual denominaremos ***distancia máxima de observación***. También realiza las mediciones pertinentes para el cálculo del área de la señal. Registra aquí los datos obtenidos.

2. Repite la actividad anterior con varias señales de Protección Civil en tu entorno. Registra los datos en la siguiente tabla.

Distancia máxima de observación (m)	Área de la señal (cm^2)

Bloque 4

1. La Norma Oficial Mexicana para el diseño de señales de Protección Civil establece que el área de las mismas dependerá de la distancia máxima a la que deberían ser aún legibles, de acuerdo a la siguiente regla:

   "El área de la señal, medida en centímetros cuadrados, debe ser por lo menos cinco veces el cuadrado de la distancia máxima de observación, medida en metros. Para distancias de 5 metros y menores, el área de las señales será como mínimo de 125 cm^2."

   a. Completen los datos faltantes en la siguiente tabla, de acuerdo a la Norma Oficial Mexicana:

Distancia máxima de observación (m)	**Área de la señal (cm^2)**
5	
10	
15	
25	
	4500
50	

   b. Describan los procedimientos que llevaron a cabo para completar la tabla anterior.

   c. Abran el Applet 1 de GeoGebra (Ver Figura 1) y verifiquen las distancias máximas de observación para las áreas propuestas.

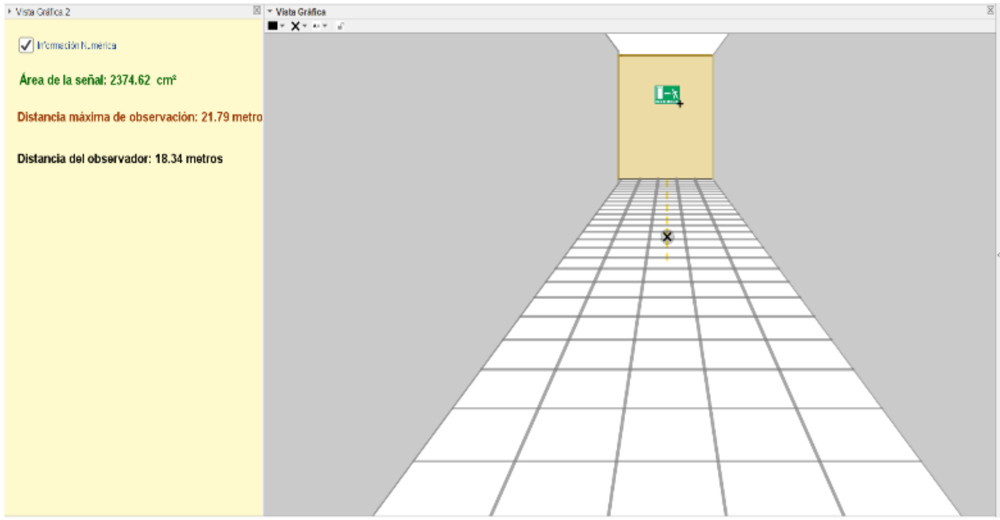

Figura 1. Applet GeoGebra que simula la relación entre el área superficial de la señal y la distancia máxima de observación, según la citada Norma Oficial Mexicana

Bloque 5

1. Abran el Applet 2 de GeoGebra (Ver Figura 2) y completen la tabla de la izquierda utilizando la Norma Oficial Mexicana. Describan la tendencia que presentan los puntos que aparecen en el área gráfica mientras llenan la tabla.

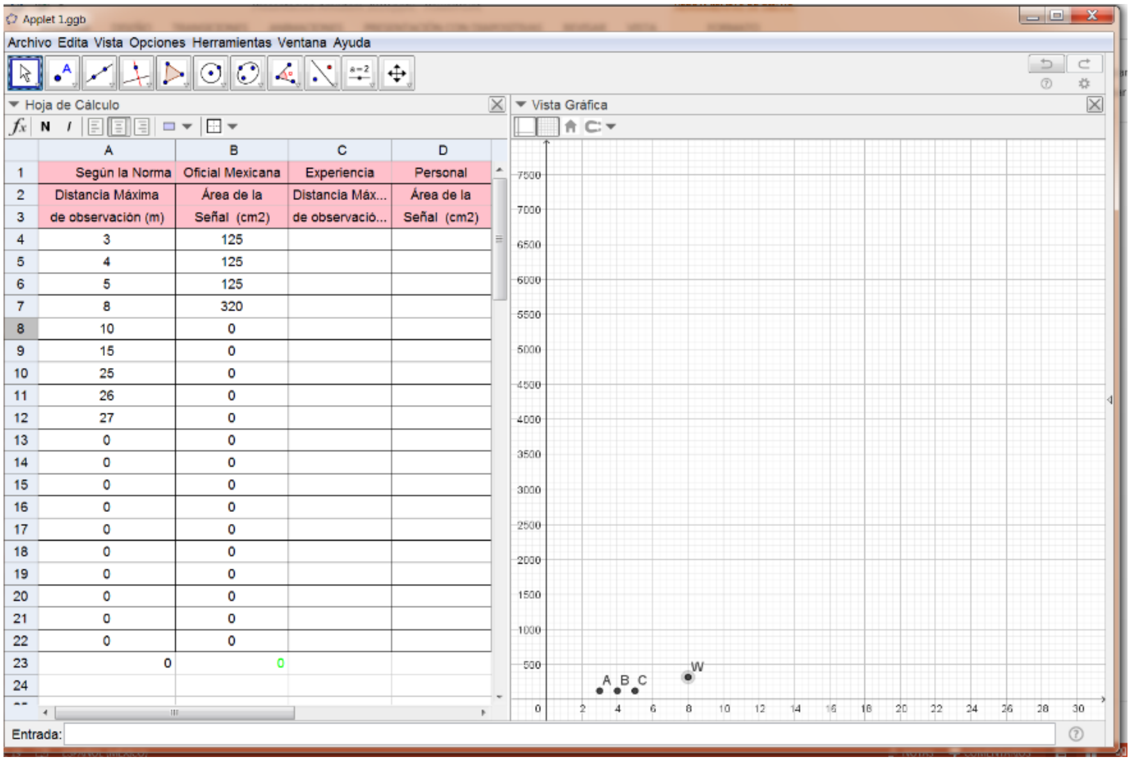

Figura 2. Applet 2 de GeoGebra que incluye una interpretación gráfica

Bloque 6

1. Incluye, ahora, en los renglones correspondientes del Applet 2 (Figura 2), la información que recabaste por tu experiencia personal y que registraste en la tabla del Bloque 3. ¿Qué tan adecuada resulta la Norma Oficial Mexicana para tu agudeza visual? ¿Por qué?

Actividades de desarrollo

Nombre:____Grupo:_________Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Continúa con esta secuencia, siguiendo las indicaciones de cada bloque. Discute tus respuestas con tus compañeros de equipo, y no olvides registrar siempre las respuestas en tus hojas de trabajo individual.

Bloque 1

1. La siguiente señal de protección civil es ofrecida por un proveedor en línea, especificando que la medida del ancho es de 25 cm y la de la altura es de 20 cm.

   a. Determinen la distancia máxima de observación según la Norma Oficial Mexicana. Escriban a detalle el procedimiento utilizado.

   b. ¿Qué consideraciones tendrían que hacer para recomendar su compra a un amigo que es dueño de un local comercial y necesita cumplir con las medidas de seguridad de protección civil y con ello evitar problemas de inspección?

   c. Abran el Applet 3 de GeoGebra (Ver Figura 3) y exploren gráficamente la relación entre la distancia máxima de observación y el área de las señales. ¿Es una relación lineal, o no? Escriban fórmulas que representen dicha relación y expliquen para qué valores de la distancia máxima de observación la relación es cuadrática.

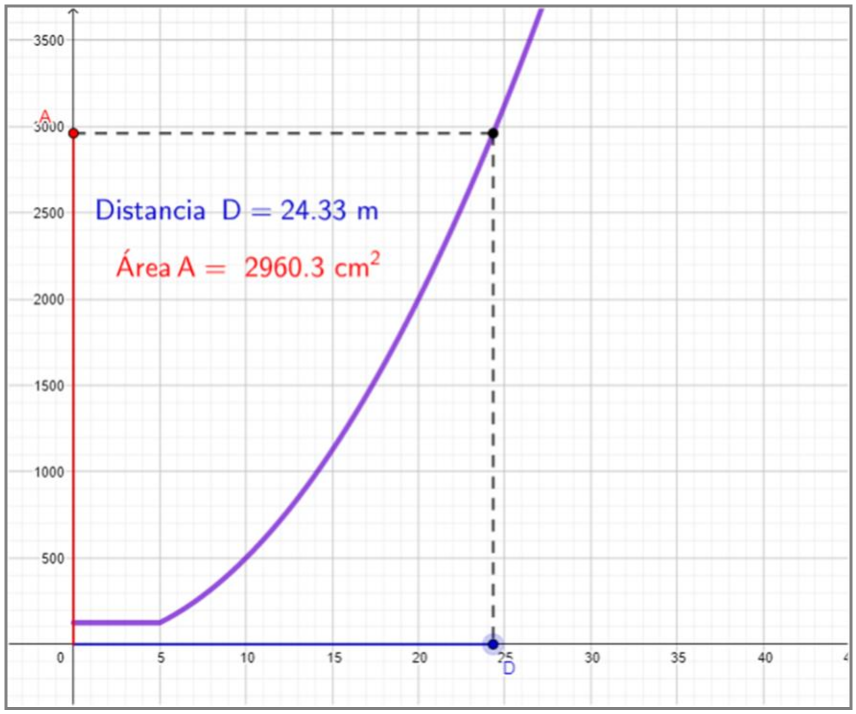

Figura 3. Representación gráfica de la relación entre la distancia máxima de observación y el área de las señales.

d. Si se desea que la señal sea visible desde una distancia de 18 m, ¿qué área debería tener, mínimamente, la señal para cumplir con la norma?

e. Determinen también el ancho y la altura de la nueva señal, de modo que se conserve la proporción entre los lados de la señal original mostrada al inicio de este bloque. Escriban con detalle sus procedimientos.

Bloque 2

1. Se requiere fabricar dos señales que se colocarán sobre una pared angosta, una debajo de la otra. Se ha solicitado que ambas señales tengan la misma área, pues se espera que sean visibles desde la misma distancia. Además, por cuestiones de diseño, se ha especificado que ambas señales tengan el mismo ancho en su base y que la altura de la señal rectangular sea de 20 cm.

   a. Expresen algebraicamente la condición de igualdad de áreas planteada en el problema.

b. ¿Qué tipo de ecuación obtuvieron?

c. Resuélvanla por algún método conocido. Compartan el procedimiento y solución obtenida con los demás compañeros.

d. Discutan si la solución obtenida cumple con la Norma Oficial que estipula que, para una señal rectangular, “la proporción del rectángulo podrá ser desde un cuadrado y hasta que la base no exceda el doble de la altura”.

Bloque 3

1. Se dispone de una lámina de 90 cm de longitud y se deben diseñar dos señales con áreas iguales, de modo que puedan ser visibles desde una misma distancia. Una de ellas tiene forma triangular y la otra es cuadrada. Se desea usar toda la longitud de la lámina, por lo que la suma de las bases de las dos señales deberá ser igual a 90 cm.

c

a. Abran el Applet 4 (Figura 4) de GeoGebra para ver una simulación de las dos señales, de modo que la suma de sus bases se ha fijado en 90 cm. Arrastren el punto C para cambiar las medidas de las bases y analiza lo que pasa con las áreas correspondientes. Estimen un valor para la base, de modo que las áreas sean iguales.

Figura 4. Señales triangular y cuadrada

b. Si denotamos con la literal x la medida de la base del triángulo, ¿cómo quedaría denotada la base del cuadrado, dado que la suma de ambas señales debe ser igual a 90 cm?

c. Escriban la expresión algebraica para el área de cada señal y expresen la condición de igualdad de áreas planteada en el problema. ¿Qué tipo de ecuación obtuvieron?

d. Abran el Applet 5 (Figura 5) de GeoGebra en el que se han incluido representaciones gráficas para el área de cada señal. Identifiquen cuál es la que corresponde al área de cada señal. ¿Qué representa el punto de corte entre ambas?

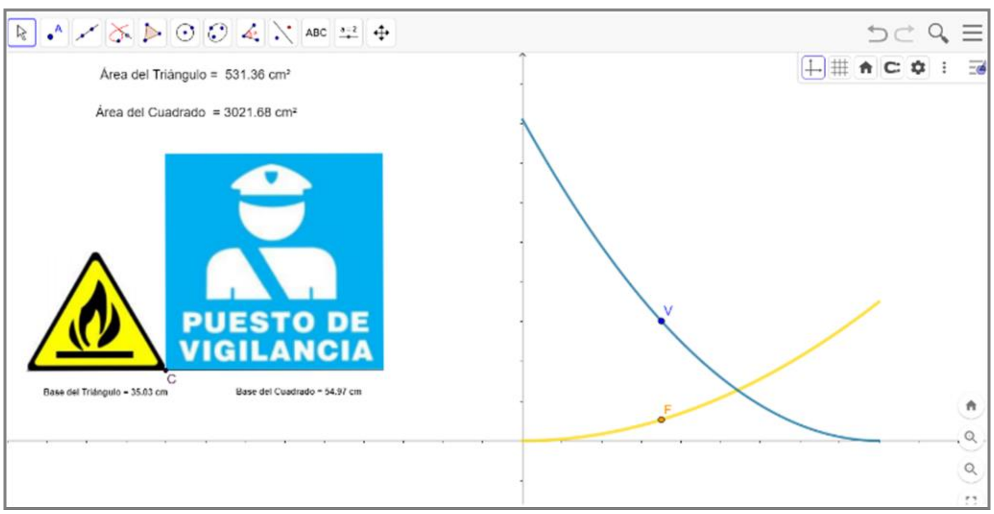

Figura 5. Representaciones gráficas para el área de cada señal

e. Resuelvan la ecuación por algún método conocido. Compartan el procedimiento y solución obtenida con los demás compañeros.

f. Determinen el área de ambas señales. ¿Cuál será la distancia máxima de observación de las mismas, según la Norma Oficial Mexicana?

Bloque 4

1. Repitan la actividad presentada en el Bloque 3 pero considerando una señal rectangular y una señal cuadrada. Consideren además que la altura de la señal rectangular debe ser fijada en 30 cm. Recuerden que la suma de las bases debe ser 90 cm.

a. Abran el Applet 6 (Figura 6) de GeoGebra en el que se ha incluido una simulación de las señales y una gráfica para la expresión del área de cada una de ellas. Identifiquen cuál es la que corresponde al área de cada señal y estimen las medidas de las bases correspondientes de modo que las áreas sean iguales.

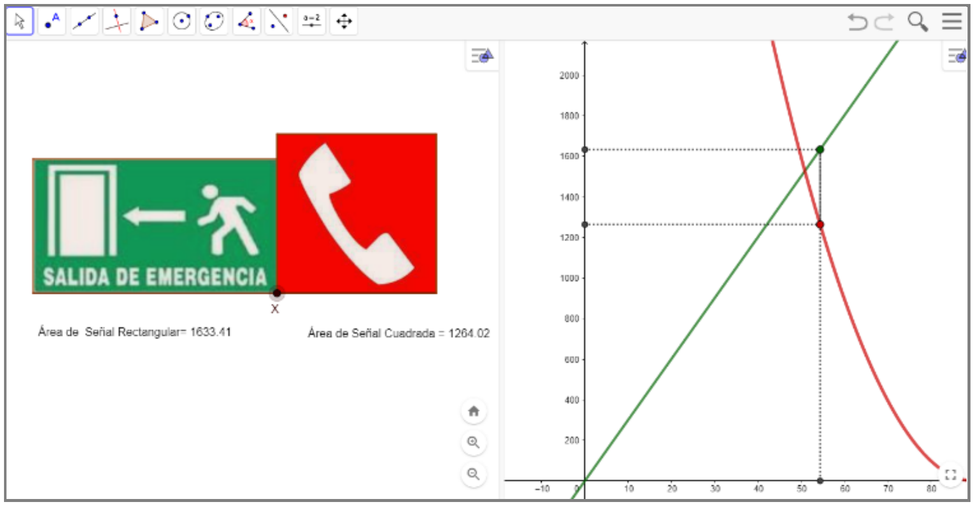

Figura 6. Señales y gráficas correspondientes.

b. Expresen la condición de igualdad entre las áreas de las señales, denotando la base de la señal rectangular con la literal x.

c. Resuelvan la ecuación obtenida por algún método conocido. Compartan el procedimiento y solución obtenida con los demás compañeros.

d. Determinen el área de ambas señales. ¿Cuál será la distancia máxima de observación de las mismas, según la Norma Oficial Mexicana?

Actividades de cierre

Nombre: ______________________________ Grupo:__________ Fecha: _________

Miembros del equipo:

INSTRUCCIONES

Finalicen esta secuencia siguiendo las indicaciones de cada bloque. Como antes, discutan todas sus respuestas con sus compañeros de equipo, pero no olviden registrar siempre las respuestas en sus hojas de trabajo individual.

Bloque 1

Los problemas abordados hasta este momento en esta secuencia han conducido a establecer ecuaciones con una incógnita en la que aparecen términos de grado dos y, posiblemente, términos de grado uno y de grado cero.

1. Discutan con los compañeros de equipo, la razón por la que las ecuaciones en cada recuadro son equivalentes entre sí. Seleccionen de cada grupo, cuál es la más fácil de resolver y encuentren sus soluciones. ¿Cuántas son en cada caso?

a) $500 = 5x^2$ $x^2 = 100$ $x^2 - 100 = 0$	b) $1620 = \frac{20}{25}x^2$ $x^2 = 2025$ $x^2 - 2025 = 0$
c) $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = 20x$ $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 - 20x = 0$ $x\left(\frac{\sqrt{3}}{4}x - 20\right) = 0$	d) $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2 = (90 - x)^2$ $\left(\frac{\sqrt{3}}{4} - 1\right)x^2 + 180x - 8100 = 0$
e) $30x = (90 - x)^2$ $x^2 - 210x + 8100 = 0$ $(x - 105)^2 = 2925$	

Enseguida profundizaremos sobre este tipo de ecuaciones, mismas que denominamos “ecuaciones de segundo grado” o “ecuaciones cuadráticas”.

La forma general de una ecuación cuadrática con una incógnita se escribe:

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0 \text{ con } a \neq 0}$$

Estas ecuaciones pueden escribirse de formas diferentes, pero siempre es posible que la ecuación sea escrita en esta forma particular, es decir, sin factores e igualada a cero, lo cual se conoce como la “forma desarrollada” o “estándar” de la ecuación cuadrática. En una ecuación cuadrática se pueden distinguir tres términos:

El término cuadrático $\boldsymbol{ax^2}$

El término lineal $\boldsymbol{bx}$

El término independiente $\boldsymbol{c}$

Cuando $b = 0$, la ecuación se reduce a $ax^2 + c = 0$ y cuando $c = 0$ se reduce a una de la forma $ax^2 + bx = 0$. En estos dos casos se dice que la ecuación es “**incompleta**”.

Notemos que si $\mathrm{b} = 0$ y $\mathrm{c} = 0$, la ecuación se reduce a la expresión $ax^2 = 0$, la cual tiene por solución $x_1 = x_2 = 0$, pues $a \neq 0$.

Cuando $a, b\ y\ c$ son distintos de cero se dice que la ecuación cuadrática es "**completa**".

Bloque 2

1. ¿Por qué en la expresión desarrollada de una ecuación cuadrática se requiere que $a \neq 0$?

2. Ahora, examinen el procedimiento de transformación de la ecuación cuadrática completa expresada en su forma general, completando el trinomio cuadrado perfecto, para así obtener una ecuación equivalente cuya resolución requiere únicamente de operaciones inversas.

Dada la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, verifiquen que, al completar el trinomio cuadrado perfecto, la ecuación queda expresada como:

$$\left(x - \frac{b}{a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{2a} = 0$$

que a su vez es equivalente a:

$$\left(x - \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{2a}$$

1) Escriban las transformaciones necesarias para dicha verificación:

3. Ahora, verifiquen que al despejar el valor de x en esta última expresión, se obtiene:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Con esta fórmula pueden encontrar las soluciones de cualquier ecuación cuadrática, ya sea completa o incompleta, por lo que se le conoce como la **Fórmula general para resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita, incluso a veces simplemente se dice "fórmula general"**.

Sin embargo, dependiendo de la forma de la ecuación puede ser más económico despejar la variable mediante operaciones inversas directas, como en el caso $ax^2 + c = 0$ o emplear un método de factorización, como en los casos $ax^2 + bx = 0$ (factor común) ó $ax^2 + a(r_1 + r_2)x + ar_1r_2 = 0$ (producto de binomios lineales cuando $r_1r_2 \neq 0$) o despejar la variable x después de completar un trinomio cuadrado perfecto y haber obtenido $(x + h)^2 = k$.

Bloque 3

Analizarán ahora la naturaleza de las soluciones encontradas en el Bloque 2 y su relación con los métodos de resolución, en particular con el de la fórmula general.

1. ¿Cuántas soluciones encontraron para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en cada caso, esto es, "incompleta" o "completa"?

2. Enlisten los métodos que conocen al momento para resolver este tipo de ecuaciones.

3. De los métodos conocidos, la fórmula general proporciona explícitamente las soluciones de una ecuación cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Escriban las soluciones de la ecuación por separado.

La expresión que se encuentra dentro del radical es conocida como discriminante y su valor proporciona información relevante sobre el tipo de soluciones de la ecuación.

Para aclarar lo anterior, completen la columna “Tipos de soluciones” de la siguiente tabla, utilizando en cada caso una de las siguientes expresiones, explica en cada caso, el porqué de tu elección.

- Dos soluciones reales distintas.
- Dos soluciones reales iguales.
- Dos soluciones no reales.

Discriminante	Tipos de soluciones	¿Por qué?
$b^2 - 4ac < 0$		
$b^2 - 4ac > 0$		
$b^2 - 4ac = 0$		

4. Encuentren las soluciones reales de las siguientes ecuaciones, en caso de tenerlas.

   a. $x^2 + 8x + 16 = 0$

   b. $2x^2 - 7x - 15 = 0$

c. $x^2 + x + 1 = 0$

Bloque 4

Analizarán ahora la ecuación cuadrática en su representación gráfica, vinculada a otras representaciones posibles. Para esto utilizaremos la expresión $y = ax^2 + bx + c$, que está asociada a la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Abran el Applet 7 (Figura 7) que muestra ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$. Utilicen los deslizadores para cambiar los valores de a y c (Recuerden que $a \neq 0$). Asimismo, arrastren el punto A para buscar las soluciones de la ecuación en la gráfica, en la representación numérica y en la representación tabular. Discutan cómo deben ser los valores de a y c para que la ecuación tenga soluciones reales y determinen un método algebraico para encontrar sus soluciones. ¿Qué relación existe entre estas soluciones reales? Escriban sus conclusiones en el siguiente espacio.

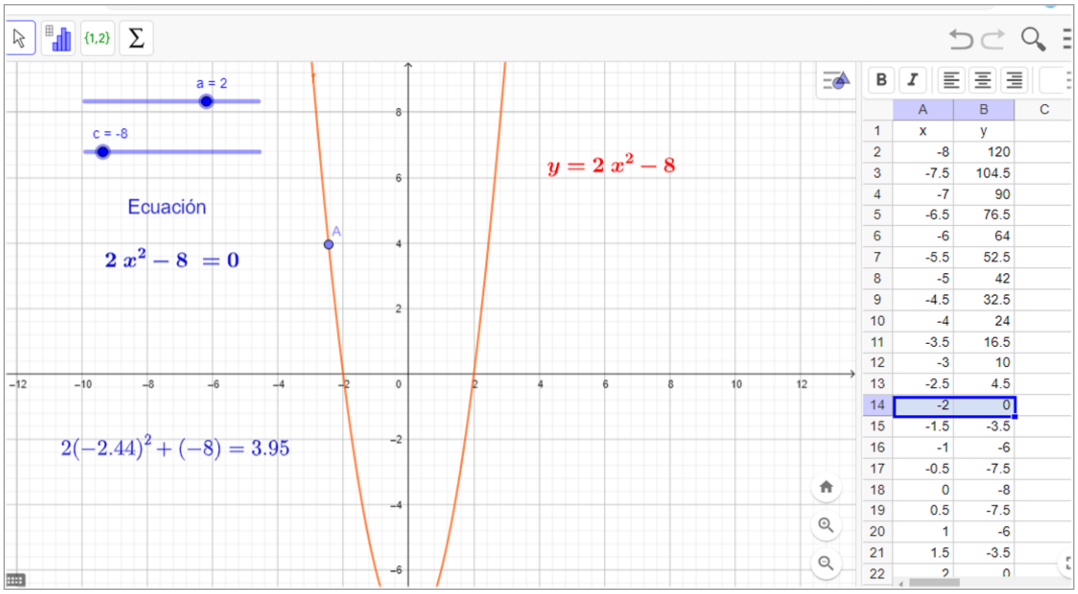

Figura 7. Applet 7 con ecuaciones de la forma $ax^2 + c = 0$ y múltiples representaciones dinámicamente vinculadas

2. Abran el Applet 8 (Figura 8) que muestra ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$. Repitan los análisis de la actividad del punto anterior y escriban sus conclusiones en el siguiente espacio.

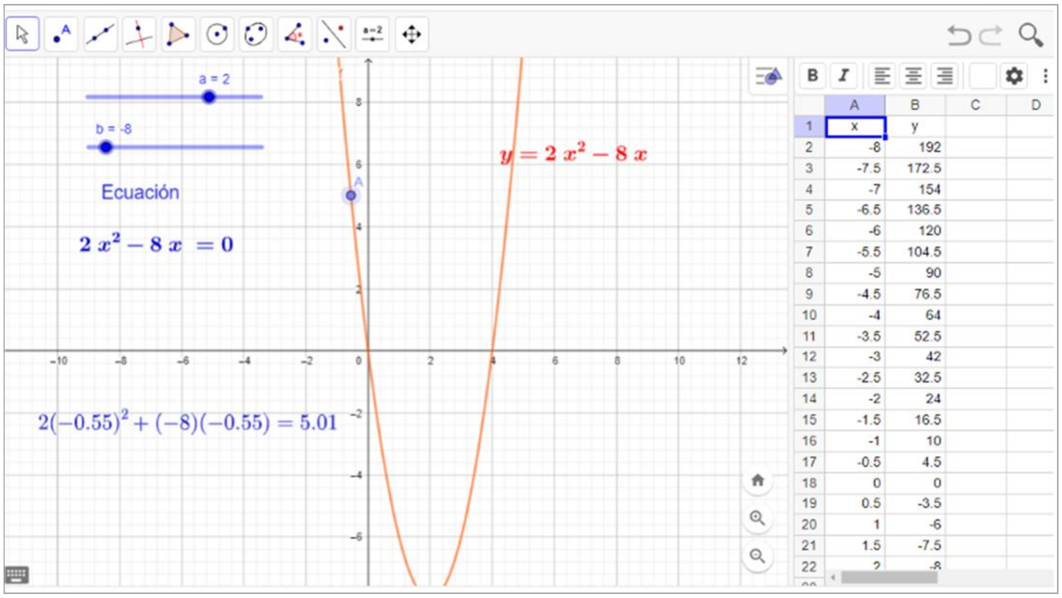

Figura 8. Applet 8 con ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ y múltiples representaciones dinámicamente vinculadas

3. Finalmente, abran el Applet 9 (Figura 9) que muestra ecuaciones completas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Repitan los análisis de la actividad del punto anterior.

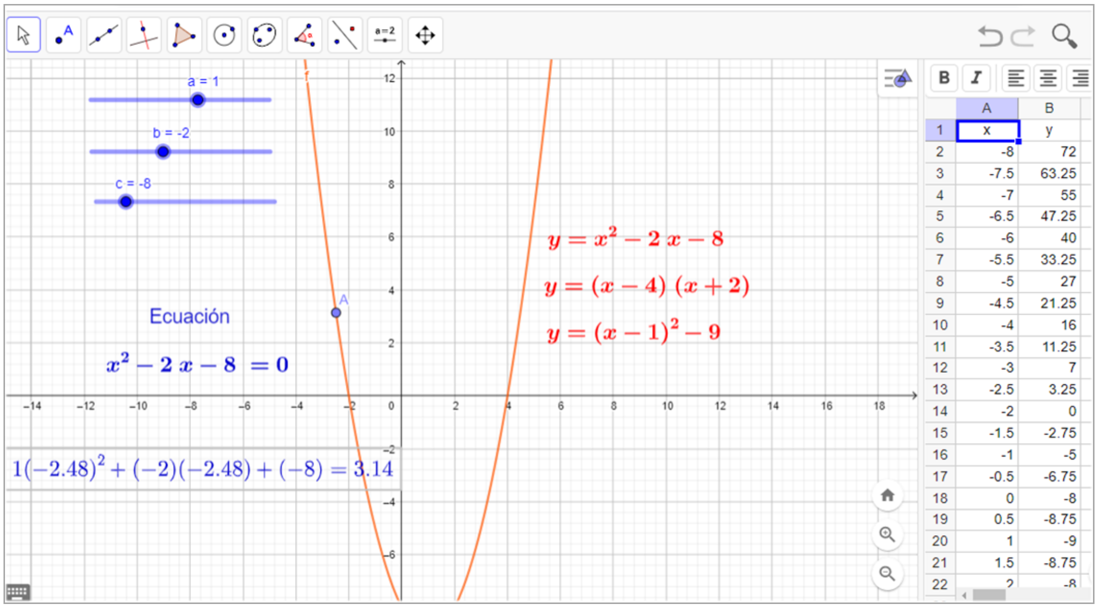

Figura 9. Applet 9 con ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ y múltiples representaciones dinámicamente vinculadas